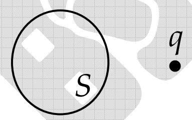
高斯定律

1. 高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q_i$，其中$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$的积分结果只与高斯面$S$内包围的电荷代数和有关；但积分表达式$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$中的电场强度$\vec{E}$与空间所有电荷分布有关，不仅包括高斯面内，也包括高斯面外。

（A）若闭合面内包围两等量异号点电荷$\pm q$，闭合面内电荷代数和为零，但在闭合面上各点场强并不为零。

（B）如果空间有两个等量同号点电荷q，若以其中一电荷为球心，两点电荷距离的一半为半径，作一球面，则该球面与点电荷之间连线的交点 P 处场强为零，但球面内电荷代数和不为零。

（C）闭合面内电荷代数和为零时，闭合面上各点场强不一定处处为零，如图所示。

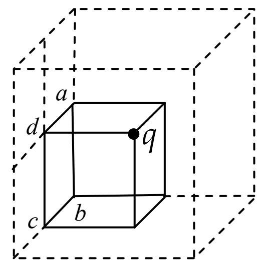


（第1题图）

（D）如果闭合面上各点场强均为零，即$\vec{E}=0$，由高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q_i$，

$\Rightarrow\ \oint_S 0\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)}q_i=0\ \Rightarrow$ 闭合面内电荷代数和为零$\sum_{(S内)}q_i=0$，不一定处处无电荷。例如一均匀带电球面，半径为R，带电Q，在球心处有一点电荷，电量为$-Q$，由对称性，带电球面外各点场强均为零；若在带电球面外作一闭合面S包围带电球面，则闭合面上各点场强均为零，曲面内电荷代数和为零，但不是处处无电荷。　　　　　　　　**本题选（C）**

2. 作一个边长是原立方体边长两倍的大立方体，使点电荷q处于大立方体的中心，则点电荷q通过大立方体 6 个表面的电通量相等。以大立方体表面为高斯面 S，整个大立方体表面的电通量为：$\phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}q\Rightarrow$通过大立方体一个表面的电通量为$\frac{q}{6\varepsilon_0}$；原小立方体表面 $abcd$ 占大立方体一个表面的$\frac{1}{4}$，所以通过 $abcd$ 表面的电通量为$\frac{q}{24\varepsilon_0}$.　　**本题选（C）**



（第2题图）

3. 通过半球面的电通量（即电场线的条数）与半球面的大圆面的电通量相等。设大圆面面元矢量$d\vec{S}$方向垂直大圆面向右，则电通量：$\phi_e=\int_{大圆面}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{大圆面}EdS\cos 0^\circ=E\int_{大圆面}dS=E\pi R^2$.

4. 建立水平向右的ox坐标轴，坐标原点在 o 点。运用割补法，在空腔球体中填补一半径为r、电荷体密度为ρ的正电荷小球体，使之成为一完整的大球体，由电场强度矢量叠加原理，完整大球体在某一点的场强$\vec{E}_{大球}$应等于空腔球体在该点的场强$\vec{E}_{空球}$加上填补的小球体在该点的场强$\vec{E}_{小球}$，即$\vec{E}_{大球}=\vec{E}_{空球}+\vec{E}_{小球}$.

① 求解空腔球体在o'点处的电场强度： 由$\vec{E}_{大球\,o'}=\vec{E}_{空球\,o'}+\vec{E}_{小球\,o'}\ \Rightarrow\ \vec{E}_{空球\,o'}=\vec{E}_{大球\,o'}-\vec{E}_{小球\,o'}$，可以分别求出完整大球体和填补的小球体在$o'$点处的电场强度。

② 求解空腔球体在P点处的电场强度： 由$\vec{E}_{大球\,P}=\vec{E}_{空球\,P}+\vec{E}_{小球\,P}\ \Rightarrow\ \vec{E}_{空球\,P}=\vec{E}_{大球\,P}-\vec{E}_{小球\,P}$，可以分别求出完整大球体和填补的小球体在$P$点处的电场强度。

（1）完整大球体在o'和P点的电场强度：

完整大球体电荷均匀分布在球体内，空间电场具有球对称性。o' 和 P 点到完整大球体中心 o 的距离都为 d，作一以 o 点为球心半径为 d 的球面 S 做为高斯面：

$$\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi d^3 \Rightarrow E4\pi d^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi d^3 \Rightarrow \text{场强大小：} E=\frac{\rho d}{3\varepsilon_0}\text{，方向沿各点半径向外。}$$

结合坐标轴，完整大球体在 o' 点的电场强度：$\vec{E}_{\text{大球}\,o'}=\dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{i}$ （方向水平向右）；

完整大球体在 P 点的电场强度：$\vec{E}_{\text{大球}\,P}=-\dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{i}$ （方向水平向左）；

（2）填补的小球体单独存在时在 o' 和 P 点的电场强度：

填补的均匀带电小球体在球心 o' 点处的电场强度为零，即 $\vec{E}_{\text{小球}\,o'}=0$；

填补的小球体单独存在时空间电场具有球对称性，P 点的电场强度可以由高斯定理求得：以 o' 点为球心、P 点到 o' 点的距离 $2d$ 为半径作一球面 S 做为高斯面，包围电荷为 $\rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$，

$$\oint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E4\pi(2d)^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \text{场强大小：} E=\frac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}\text{，方向沿各点半径向外。}$$

结合坐标轴，填补的小球体单独存在时在 P 点的电场强度：$\vec{E}_{\text{小球}\,P}=-\dfrac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}\vec{i}$ （方向水平向左）；

综上，① 空腔球体在 o' 点处的电场强度：$\vec{E}_{\text{空球}\,o'}=\vec{E}_{\text{大球}\,o'}-\vec{E}_{\text{小球}\,o'}=\dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{i}-0=\dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{i}$；

② 空腔球体在 P 点处的电场强度：$\vec{E}_{\text{空球}\,P}=\vec{E}_{\text{大球}\,P}-\vec{E}_{\text{小球}\,P}=-\dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}\vec{i}-(-\dfrac{\rho r^3}{12\varepsilon_0 d^2}\vec{i})=-\dfrac{\rho}{12\varepsilon_0 d^2}(4d^3-r^3)\vec{i}$.

5. 两个无限长共轴圆柱面，半径分别为 R_1 和 R_2，电荷线密度分别为 λ_1 和 λ_2，把空间分成三个区域。电荷均匀分布在圆柱面上，空间电场具有柱对称性。分别在各个区域内作一半径为 r（到轴线的距离）、高为 h 的共轴圆柱面 S 做为高斯面：

（1）$r<R_1$ $\quad\oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}0 \Rightarrow E2\pi rh=\dfrac{1}{\varepsilon_0}0 \Rightarrow E=0$；

（2）$R_1<r<R_2$ $\quad\oint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\lambda_1 h \Rightarrow E2\pi rh=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\lambda_1 h \Rightarrow E=\dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$；

（3）$r>R_2$ $\quad\oint_{S_3}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\lambda_1+\lambda_2)h \Rightarrow E2\pi rh=\dfrac{1}{\varepsilon_0}(\lambda_1+\lambda_2)h \Rightarrow E=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$；

空间各点的电场强度分布：
$$E=\begin{cases}0 & (r<R_1)\\ \dfrac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} & (R_1<r<R_2)\\ \dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r>R_2)\end{cases}.$$

